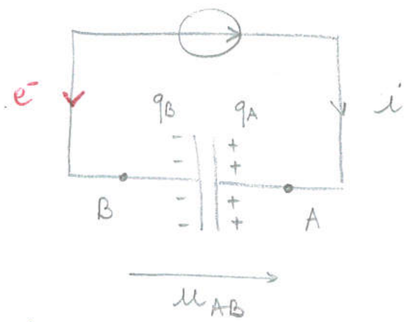
Chapitre 12 . Régime transitoire d'un circuit RC

1. Le condensateur

Un condensateur est un dipôle constitué de 2 surfaces conductrices appelées armatures, séparées par un isolant.
Son symbole est :

Les charges ne peuvent pas traverser le condensateur : elles s'accumulent sur ses armatures.
Lorsque l'on branche un condensateur aux bornes d'un générateur, des électrons de l'armature A circulent vers l'armature B, créant ainsi un courant électrique.



$q_A = -q_B$

L'accumulation de charges opposées sur les armatures fait apparaître une tension aux bornes du condensateur.
L'intensité i et la tension u_{AB} évoluent au cours du temps : le circuit est en régime transitoire.
Lorsque la tension du condensateur égale celle du générateur, le courant s'annule : le circuit a atteint le régime permanent (les grandeurs sont constantes).

La charge q du condensateur est proportionnelle à la tension u entre ses bornes :

$$\boxed{q = Cu}$$

avec $q = q_A = -q_B$
q en C
u en V
C en Farad (F)

C est appelée <u>capacité</u> du condensateur, en <u>Farad (F)</u>.

En convention récepteur, $i = \dfrac{dq}{dt}$ donc :

$$\boxed{i = C\,\dfrac{du}{dt}}$$

i en A
C en F
u en V

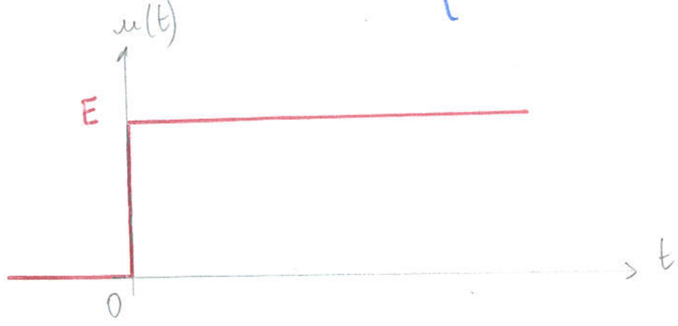
Application n° 6 p 146

2. Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension

On appelle dipôle RC l'association en série d'un condensateur de capacité C et d'un conducteur ohmique de résistance R.

Un échelon de tension est un signal électrique de la forme :

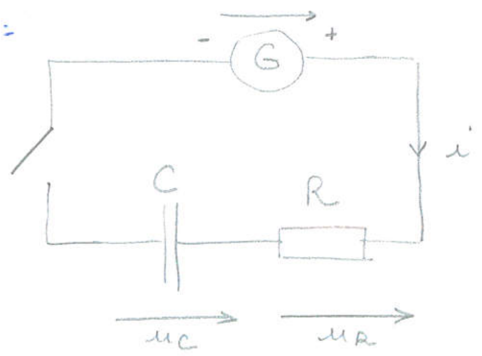
$$\begin{cases} u(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ u(t) = E & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



1) Equation différentielle de la tension $u_C(t)$

A $t = 0$, le condensateur est déchargé.

Loi des mailles :



$u_C + u_R - E = 0$

On cherche à éliminer u_R : $u_R = Ri$

et $i = C \dfrac{du_C}{dt}$

d'où $\boxed{u_C + RC \dfrac{du_C}{dt} = E}$

Vérifions que $u_C(t) = A\, e^{-\frac{t}{\tau}} + B$ est une solution de l'équation différentielle.

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} = E \iff A\, e^{-\frac{t}{\tau}} + B - \frac{A}{\tau} . RC\, e^{-\frac{t}{\tau}} = E$$

L'équation est vraie quelque soit t si :

$$\begin{cases} A - A . \dfrac{RC}{\tau} = 0 \\ B = E \end{cases} \iff \begin{cases} \tau = RC \\ B = E \end{cases}$$

Cherchons la valeur de A à l'aide de la condition initiale : $u_C(t=0) = 0$

$$\iff A + B = 0 \quad \text{donc} \quad A = -E$$

D'où l'expression $\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

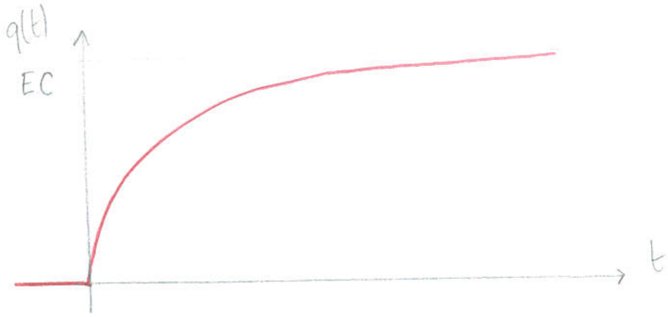
Remarque : la tension aux bornes du condensateur est continue car sinon $i = C \dfrac{du_C}{dt}$ n'est pas défini :

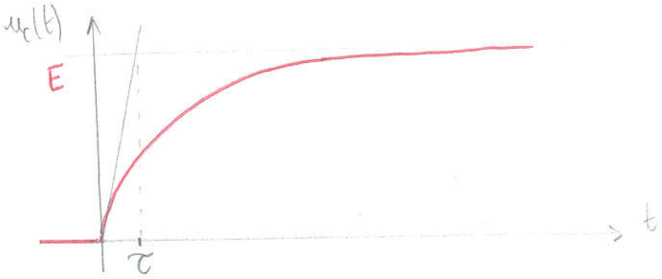
$$u_C(t=0^-) = u_C(t=0^+)$$

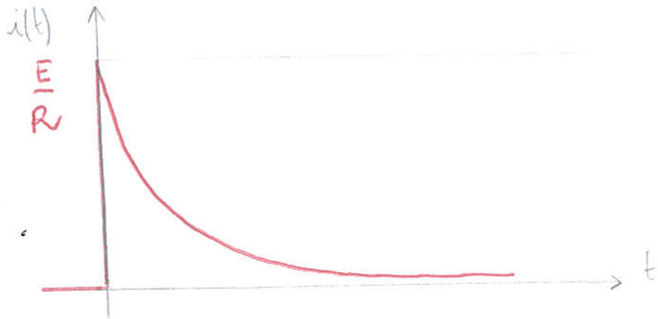
2) Evolution de la charge et du courant.

$q(t) = C\, u_C(t)$ donc $q(t) = EC\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$i(t) = C \dfrac{du_C}{dt}$ donc $i(t) = \dfrac{EC}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \dfrac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$







3) Constante de temps τ.

La constante de temps τ du dipôle RC est :

$\boxed{\tau = RC}$ R en Ω, C en F, τ en s

Détermination de τ :

* $\frac{du_c}{dt}(t=0) = \frac{E}{\tau}$ donc la tangente à $u_c(t)$ à $t=0$ a pour équation $u = \frac{E}{\tau} \times t$; donc la tangente coupe l'asymptote $u = E$ à $t = \tau$.

* $u_c(t=\tau) = E(1-e^{-1}) = E(1-\frac{1}{e}) \approx 0,63 . E$

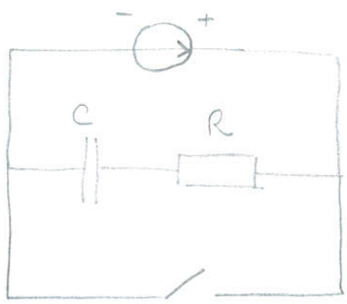
A $t = \tau$, $u_c(\tau) = 63\%\ E$.

Durée du régime transitoire :

Le régime transitoire dure environ 5τ :
$u_c(t=5\tau) \approx 0,99 . E$ lors de la charge.

ex. 14 p 148
+ 10

3. Décharge du condensateur dans un circuit RC



A $t = 0$, le condensateur est chargé et on ferme l'interrupteur :

$$u_R + u_C = 0 \iff \boxed{RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0}$$

Forme générale de la solution : $u_C(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + B$

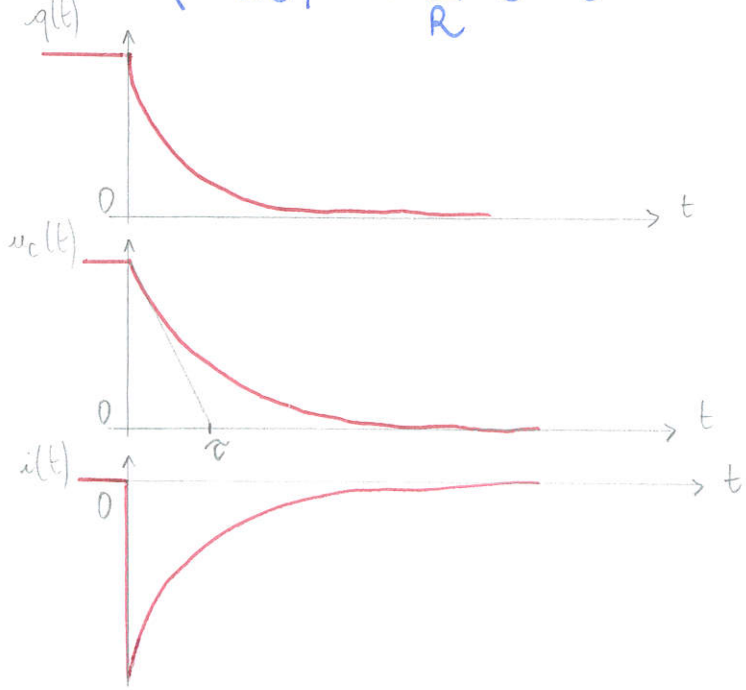
$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \iff -A \cdot \frac{RC}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + A e^{-\frac{t}{\tau}} + B = 0$$

$$\iff \begin{cases} \tau = RC \\ B = 0 \end{cases}$$

Condition initiale : $u_C(t=0) = E \iff A + B = E$

$\iff A = E$

donc
$$\begin{cases} \underline{u_C(t) = E \, e^{-\frac{t}{\tau}}} \\ q(t) = EC \, e^{-\frac{t}{\tau}} \\ i(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$



Détermination de la constante de temps τ :

* La tangente à u_C à $t = 0$ coupe l'axe $u_C = 0$ à $t = \tau$.

* $u_C(t = 5\tau) = 0{,}01\ E$ lors de la décharge.

4. Energie emmagasinée dans un condensateur

Puissance électrique reçue par le condensateur :

$$P = u \cdot i = \frac{q}{C} \cdot \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right)$$

Or $P = \dfrac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t}$ donc $\Delta\mathcal{E} = P \cdot \Delta t$

Supposons P constante : $P = \dfrac{\Delta\left(\frac{q^2}{2C}\right)}{\Delta t}$

et $\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C u^2}$

Ex. 13 p 148 + 16*

Un condensateur chargé, de capacité C, possède une énergie électrique : $\underline{\mathcal{E} = \frac{1}{2} \cdot C u^2}$. (en J)