Chapitre 14. Equations horaires du mouvement
Exemples de cours - Corrigé

Exemple n° 1 : Equation horaire de la vitesse

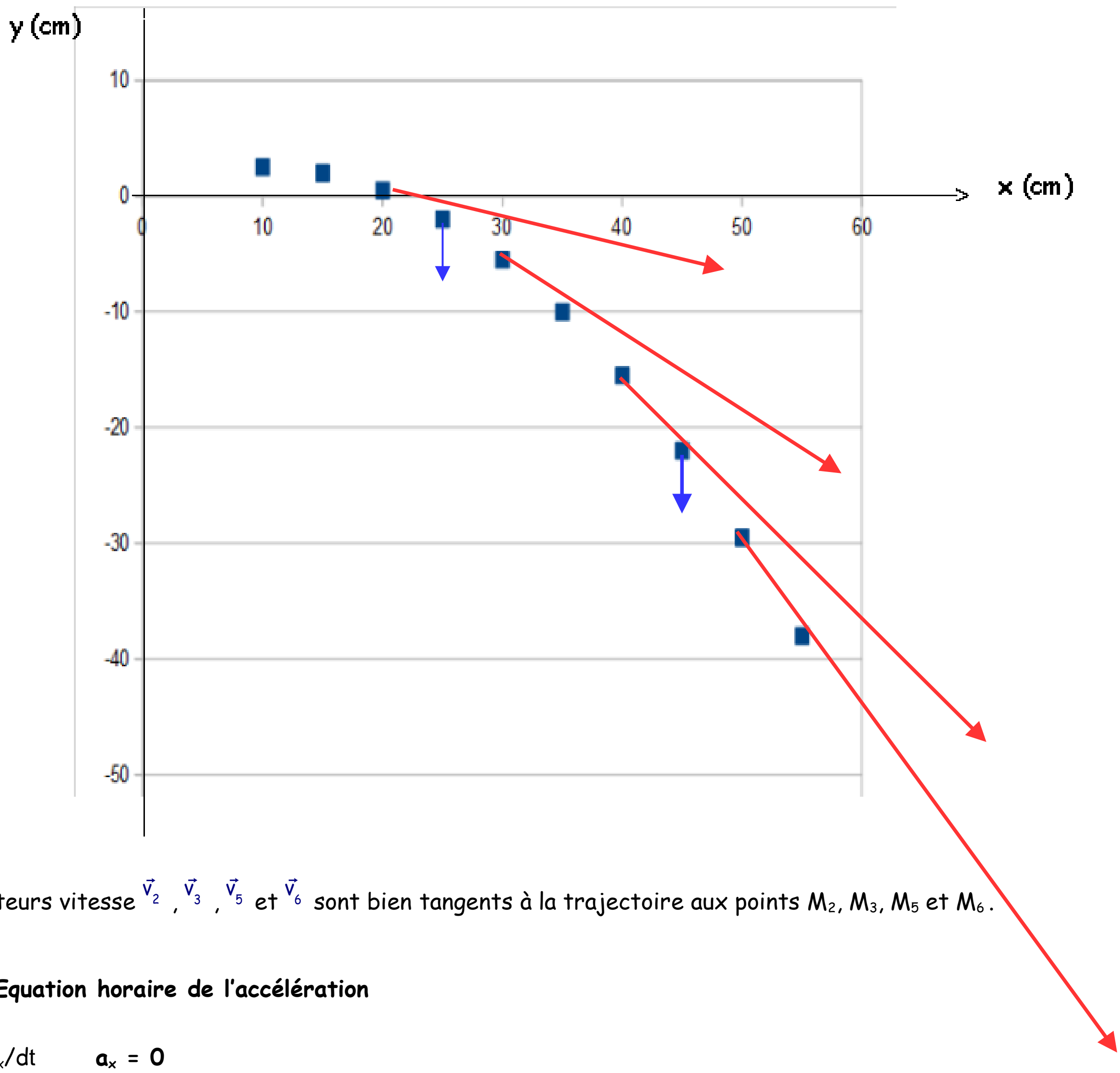
1.

point M	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}
t en s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x (t)	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
y (t)	2	2,5	2	0,5	-2	-5,5	-10	-15,5	-22	-29,5	-38

2. $v_x(t) = dx/dt$ **$v_x(t) = 5$**
   $v_y(t) = dy/dt = -0{,}5 \times 2\,t + 1$ **$v_y(t) = -\,t + 1$**
3. Au point M_2 :
   $x\,(t{=}2) = 20$ $v_x\,(t{=}2) = \mathbf{5}$
   $y\,(t{=}2) = 2$ $v_y\,(t{=}2) = -2 + 1 = \mathbf{-1}$

   Au point M_4 :
   $x\,(t{=}4) = 30$ $v_x\,(t{=}4) = \mathbf{5}$
   $y\,(t{=}4) = -2$ $v_y\,(t{=}4) = -4 + 1 = \mathbf{-3}$
4. Au point M_6 :
   $x\,(t{=}6) = 40$ $v_x\,(t{=}6) = \mathbf{5}$
   $y\,(t{=}6) = -10$ $v_y\,(t{=}6) = -6 + 1 = \mathbf{-5}$

   Au point M_8 :
   $x\,(t{=}8) = 50$ $v_x\,(t{=}8) = \mathbf{5}$
   $y\,(t{=}8) = -22$ $v_y\,(t{=}8) = -8 + 1 = \mathbf{-7}$



Les vecteurs vitesse $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_5$ et $\vec{v}_6$ sont bien tangents à la trajectoire aux points M_2, M_3, M_5 et M_6 .

Exemple n°2 : Equation horaire de l'accélération

1. $a_x = dv_x/dt$ **$a_x = 0$**
   $a_y = dv_y/dt$ **$a_y = -1$**
2. $a_x\,(t{=}3) = \mathbf{0}$ $a_x\,(t{=}7) = \mathbf{0}$
   $a_y\,(t{=}3) = \mathbf{-1}$ $a_y\,(t{=}7) = \mathbf{-1}$
3. Les vecteurs accélération sont bien orientés selon le vecteur variation de vitesse $\vec{v}_4 - \vec{v}_2$ et $\vec{v}_6 - \vec{v}_5$.

Exemple n°3 : Accélération : exploitation d'une courbe de vitesse

1. La vitesse augmente constamment et tend vers une valeur constante.
2. Pour un mouvement rectiligne, **a = dv/dt**
3. L'accélération peut être mesurée en prenant la pente de la tangente à la courbe v(t) à chaque instant t.
4. L'accélération est constante et non nulle pour $0 < t < 5$ s. Le mouvement est alors **rectiligne uniformément accéléré**.
5. L'accélération est nulle pour $t > 15$ s. Le mouvement est alors **rectiligne uniforme**.
6. $a(t_1) = 40 / 2{,}5$ $\quad$ **$a(t_1) = 16\ m.s^{-2}$**
   $a(t_2) = (90-40) / 8$ $\quad$ **$a(t_2) = 6{,}3\ m.s^{-2}$**

Exemple n°4 : Chute libre sans vitesse initiale

1. $a_z = -g$ car l'objet est en chute libre
   $a = dv/dt$ $\quad$ donc $v_z = -gt + C1$
   Or, à t = 0 $\quad$ $v_z = C_1 = 0$ car l'objet est lâché sans vitesse initiale donc $C_1 = 0$ $\quad$ d'où **$v_z(t) = -gt$**
2. $v_z(t=200.10^{-3}) = -1{,}966\ m.s^{-1}$ $\quad$ donc $g = -v_z / t$ $\quad$ **$g = 9.830\ N.kg^{-1}$**
3. $v_z = dz/dt$ $\quad$ donc $z = -\frac{1}{2} gt^2 + C_2$
   Or, à t = 0 $\quad$ $z = C_2 = 0$ $\quad$ en prenant la position initiale comme origine de l'axe $\vec{z}$ donc $C_2=0$
   d'où **$z = -\frac{1}{2} gt^2$**
4. $z(t=200.10^{-3}) = -0{,}1966$ m soit **19,66 cm**.

Exemple n°5 : Vitesse limite

Lorsque la bille atteint sa vitesse limite, elle est en mouvement rectiligne uniforme (vitesse constante) donc :
$\Sigma\vec{F}=\vec{0}$ soit $\vec{P}+\vec{P_A}+\vec{f}=\vec{0}$ $\quad$ avec $P = mg$ $\quad$ et $\quad$ $P_A = \rho_g V g$
En projection sur l'axe $\vec{z}$: $-mg + \rho_g V g + 6 \pi \eta r v = 0$

D'où $v=\dfrac{(m-\rho_g V)g}{6\pi\eta r}$ $\quad$ **$v = 0{,}6\ cm.s^{-1}$**

Exemple n°6 : Mouvement d'un projectile

1.

- Accélération :

$\Sigma\vec{F}=m\vec{a}$ Or l'obus n'est soumis qu'à son poids (on néglige les frottements de l'air et la poussée d'Archimède)
donc $m\vec{g}=m\vec{a}$ d'où $\vec{a}=\vec{g}$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-g\end{pmatrix}$$
dans un repère où l'axe y est orienté vers le haut.

- Vitesse :

En prenant une primitive de a_x et a_y, sans oublier les constantes :

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\\-gt+C_2\end{pmatrix}$$

Pour déterminer C_1 et C_2, utilisons les données expérimentales à savoir les coordonnées de la vitesse à t = 0.

$$\vec{v_0}=\vec{v}(t=0)=\begin{pmatrix}v_0\cos\alpha\\v_0\sin\alpha\end{pmatrix}$$
et par identification avec l'expression de $\vec{v}$ à t = 0 : $\vec{v}(t=0)=\begin{pmatrix}C_1\\0+C_2\end{pmatrix}$

on trouve : $\quad$ $C_1 = v_0 \cos\alpha$
$C_2 = v_0 \sin\alpha$

D'où les coordonnées de la vitesse : $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_0\cos\alpha\\-gt+v_0\sin\alpha\end{pmatrix}$

- <u>Position (x,y) :</u>

  En prenant une primitive de v_x et v_y, sans oublier les constantes :

$$\vec{OM}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_0\cos\alpha t+C_3\\ \frac{-1}{2}gt^2+v_0\sin\alpha t+C_4\end{pmatrix}$$

Pour déterminer C_3 et C_4, utilisons les données expérimentales à savoir la position à t = 0.

$$\vec{OM}(t=0)=\begin{pmatrix}x(t=0)\\y(t=0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

et par identification avec l'expression de $\vec{OM}$ à t = 0 :

$$\vec{OM}(t=0)=\begin{pmatrix}0+C_3\\0+0+C_4\end{pmatrix}$$

on trouve : $C_3 = 0$

$C_4 = 0$

D'où les coordonnées de l'obus :

$$\vec{OM}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_0\cos\alpha t\\ \frac{-1}{2}gt^2+v_0\sin\alpha t\end{pmatrix}$$

que l'on peut écrire aussi : **(1)** $\mathbf{x(t) = v_0 \cos \alpha\, t}$

(2) $\mathbf{y(t) = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 \sin \alpha\, t}$

2. L'équation de la trajectoire correspond à la fonction y = f(x) : il faut donc exprimer y en fonction de x et non en fonction du te mps t. Pour cela, on remplace t par son expression en fonction de x.

(1) donne : $t=\frac{x}{v_0\cos\alpha}$

(2) donne : $y=\frac{-1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2+v_0\sin\alpha\frac{x}{v_0\cos\alpha}$ donc $\mathbf{y=-g\frac{x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}+x\tan\alpha}$

3. La portée du tir correspond à la distance au bout de laquelle l'obus retombe au sol, c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle y = 0 soit $-g\frac{x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}+x\tan\alpha=0$.

En factorisant par x, $x\left(-g\frac{x}{2v_0^2\cos^2\alpha}+\tan\alpha\right)=0$ on obtient 2 solutions possibles :

x = 0

ou $x=2\frac{v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g}=2\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}=\frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$

Soit p la portée maximale obtenue pour $\alpha=45°$, alors $p=\frac{v_0^2}{g}$ et donc $v_0=\sqrt{pg}$

On obtient $v_0 = 1100\ m.s^{-1}$ soit **3944 km.h^{-1}**.