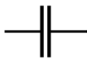
P11. Régime transitoire dans un circuit RC
Cours

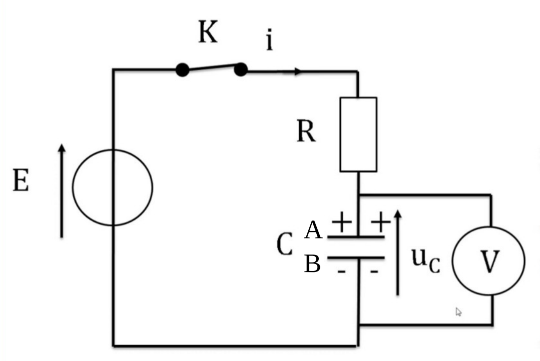
I Qu'est-ce qu'un condensateur ?

Un **condensateur** est un dipôle constitué de 2 surfaces conductrices appelées **armatures**, séparées par un isolant.

Son symbole est : 

Les charges ne peuvent donc pas traverser un condensateur : elles s'accumulent sur ses armatures.

Observation expérimentale de la charge d'un condensateur

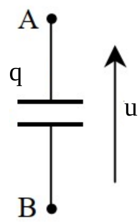


Lorsque l'on branche un condensateur aux bornes d'un générateur, des charges de l'armature B se déplacent vers l'armature A, créant ainsi un courant électrique dans le circuit.
La charge de l'armature A devient positive, tandis que celle de l'armature B devient négative : q_A (t) = - q_B (t) augmente.
L'accumulation de charges opposées sur les armatures fait apparaître un champ électrique dans l'isolant et une tension entre les 2 armatures, aux bornes du condensateur : u_C(t) augmente.
On dit que le condensateur se charge.

Pendant la charge du condensateur, la tension uc à ses bornes varie et l'intensité du courant i dans le circuit varie : on parle de **régime transitoire** ; les grandeurs électriques u et i varient en fonction du temps.

Une fois que le condensateur a atteint la tension délivrée par le générateur, le courant s'annule et la tension aux bornes du condensateur reste constante : le condensateur est chargé. On parle de **régime permanent** ; les grandeurs u et i sont constantes au cours du temps.

Caractérisation d'un condensateur



Un condensateur est caractérisé par sa capacité à stocker des charges sur ses armatures.
La charge q stockée sur une armature est proportionnelle à la tension aux bornes du condensateur :

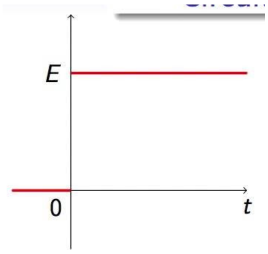
$$\boxed{q = C\,u}$$ q en C, U en V

C est appelée **capacité du condensateur** et s'exprime en **Farad** (F).
Les valeurs courantes de capacités utilisées en électronique varient du pF (picoFarad) au mF (milliFarad).

Remarque : En régime transitoire ou variable, on peut écrire : q(t) = C u(t) avec q(t) et u(t) fonctions du temps.

En convention récepteur, on a $i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$ donc $\boxed{i=C\frac{du(t)}{dt}}$ i(t) en A, C en F et u(t) en V

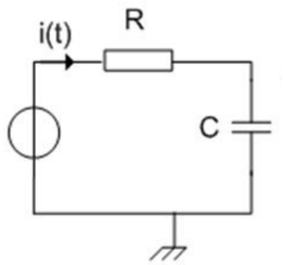
II Réponse en tension d'un circuit RC au cours de la charge



On appelle **dipôle RC** l'association en série d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C.
Un échelon de tension est un signal électrique $u_G(t)$ de la forme suivante :

pour $t < 0$: $u_G(t) = 0$

pour $t > 0$: $u_G(t) = E$



On étudie un circuit RC série alimenté par un échelon de tension.
A t = 0, le condensateur est déchargé : $u_C(t=0) = 0$.
On étudie le circuit pour t > 0.

Loi des mailles : $E = u_R(t) + u_C(t)$ (1)

Loi d'Ohm aux bornes de R : $u_R(t) = R\, i(t)$

Relation aux bornes de C : $i = C\dfrac{du_C(t)}{dt}$

On cherche à établir l'équation qui régit l'évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur :

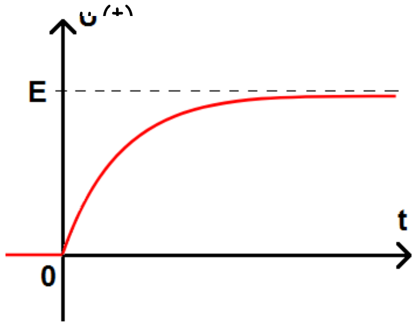
(1) <=> $E = R\, i(t) + u_C(t)$

<=> $$\boxed{E = RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)}$$

Cette équation est l'**équation différentielle** de la tension $u_C(t)$.

La solution de cette équation est la fonction

$$u_C(t) = E\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \quad \text{avec } \tau = RC$$



$u_C(t) = E\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$

Montrons que cette fonction est bien solution de l'équation différentielle en remplaçant dans cette équation $u_C(t)$ par son expression :

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(E\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(E - E\,e^{\frac{-t}{\tau}}\right) = -E \cdot -\frac{1}{\tau} \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} = \frac{E}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}$$

donc $RC\dfrac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = RC \cdot \dfrac{E}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}} + E\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) = Ee^{\frac{-t}{\tau}} + E - Ee^{\frac{-t}{\tau}} = E$

Remarques :

- La tension $u_C(t)$ est une fonction continue car l'intensité $i(t)$ étant proportionnelle à $\dfrac{du_C(t)}{dt}$, $u_C(t)$ doit être dérivable : $u_C(t=0^-) = u_C(t=0^+)$.
- La charge $q(t)$ sur une armature du condensateur vaut : $q(t) = C\, u_C(t)$ donc $q(t) = CE\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$.
  Elle a donc la même allure que $u_C(t)$.

III Constante de temps τ

La **constante de temps τ** d'un dipôle RC vaut $\boxed{\tau = RC}$ τ en s, R en Ω et C en F.

Montrons par une analyse dimensionnelle que RC est bien homogène à un temps :

$u = R\,i$ donc $[\Omega] = [V] / [A]$

$i = C\,du/dt$ donc $[A] = [F] . [V] / [s]$ c'est-à-dire $[F] = [A] . [s] / [V]$

d'où $[\Omega] . [F] = [V] / [A] . [A] . [s] / [V] = [s]$

Le temps de charge du condensateur dure environ 5 τ : c'est donc aussi la durée du régime transitoire.

En effet, $u_C(t = 5\tau) = E\,(1 - e^{\frac{-5\tau}{\tau}}) = E\,(1 - e^{-5}) = 0{,}99\,E$ soit 99 % de E.

Au bout d'une durée égale à 5 τ, le condensateur est chargé à 99 % de sa charge finale.

Mesure de la constante de temps τ par méthodes graphiques :

- **Méthode de la tangente** :

La tangente à la courbe $u_C(t)$ en $t = 0$ coupe l'asymptote $u(t) = E$ à $t = \tau$.

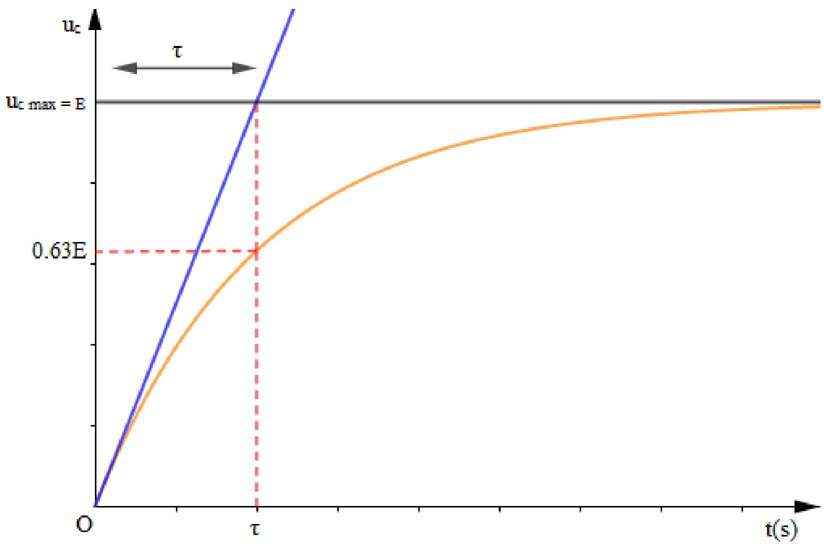
En effet, la tangente a pour équation : $u(t) = \left(\frac{du_C(t)}{dt}(t=0)\right) . t = \frac{E}{\tau} e^{\frac{-0}{\tau}} . t = \frac{E}{\tau} . t$

Donc la tangente croise l'asymptote $u(t) = E$ pour $E = \frac{E}{\tau} . t$ soit $t = \tau$.

- **Méthode des 63 %** :

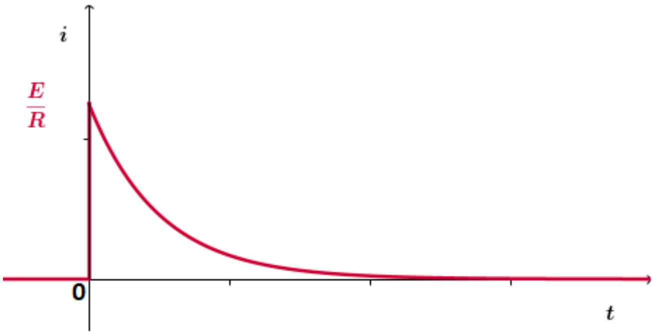
A $t = \tau$, la tension du condensateur a atteint 63 % de sa valeur finale : $u_C(t = \tau) = 0{,}63\,E$

En effet, $u_C(t = \tau) = E\,(1 - e^{-t/\tau}) = E\,(1 - e^{-1}) = 0{,}63\,E$ soit 63 % de E.



IV Evolution de l'intensité du courant au cours de la charge

$i(t)=C\frac{du_C(t)}{dt}$ donc $i(t) = C \,.\, \frac{E}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}} = \frac{CE}{RC}e^{\frac{-t}{\tau}}$ soit $\mathbf{i(t) = \frac{E}{R}e^{\frac{-t}{\tau}}}$



$i(t) = \frac{E}{R}e^{\frac{-t}{\tau}}$

Remarques :

- L'intensité du courant est discontinue en t = 0 : $i(t=0^-) = i(t=0^+)$.
- Au cours de la charge, en convention récepteur, $i(t) > 0$ car le condensateur reçoit de l'énergie du générateur qu'il stocke.
- Une fois le condensateur chargé, $i(t) = 0$.

V Energie emmagasinée dans le condensateur

La puissance instantanée reçue par le condensateur s'exprime :

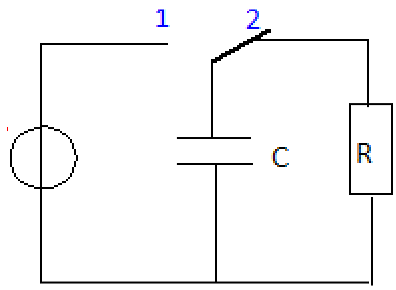
$$P(t) = u_C(t) \,.\, i(t) = u_C(t) \,.\, C\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2(t)\right)$$

Or la puissance instantanée reçue correspond à la dérivée de l'énergie ε(t) reçue donc : $P(t) = \frac{d\epsilon(t)}{dt}$

On en déduit que l'énergie emmagasinée par le condensateur s'exprime :

$$\boxed{\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\, C\, u_C^2(t)}$$

VI Étude de la décharge du condensateur



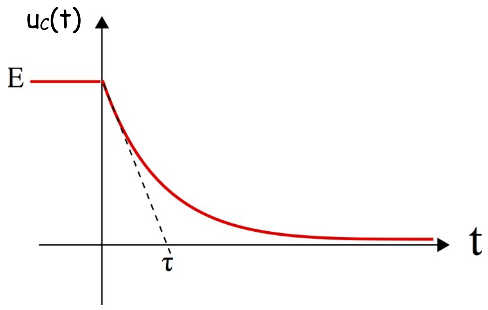
A $t = 0$, on bascule l'interrupteur en position 2.
Le condensateur est initialement chargé à la tension $u_C(t=0) = E$.
On étudie le circuit pour $t > 0$.

Loi des mailles : $0 = u_R(t) + u_C(t)$
Loi d'Ohm aux bornes de R : $u_R(t) = R\, i(t)$
Relation aux bornes de C : $i = C\dfrac{du_C(t)}{dt}$

On obtient l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$: $\boxed{\mathbf{RC\dfrac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0}}$

La solution de cette équation est la fonction

$$\mathbf{u_C(t) = E\ e^{\frac{-t}{\tau}}} \quad \text{avec } \mathbf{\tau = RC}$$



Montrons que cette fonction est bien solution de l'équation différentielle en remplaçant dans cette équation $u_C(t)$ par son expression :

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(E\ e^{\frac{-t}{\tau}}\right) = E\ .\ -\frac{1}{\tau}\ .\ e^{\frac{-t}{\tau}} = -\ \frac{E}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$\text{donc } RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = RC\ .\left(-\ \frac{E}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}\right) + E\ e^{\frac{-t}{\tau}} = -\ Ee^{\frac{-t}{\tau}} + Ee^{\frac{-t}{\tau}} = 0$$

Le temps de décharge du condensateur dure environ 5 τ : c'est donc aussi la durée du régime transitoire.

En effet, $u_C(t = 5\,\tau) = E\ e^{\frac{-5\tau}{\tau}}) = E\,e^{-5} = 0{,}01\,E$ soit 1 % de E.
Au bout d'une durée égale à 5 τ, le condensateur n'est plus chargé qu'à 1 % de sa charge initiale.

Mesure de la constante de temps τ par méthodes graphiques :

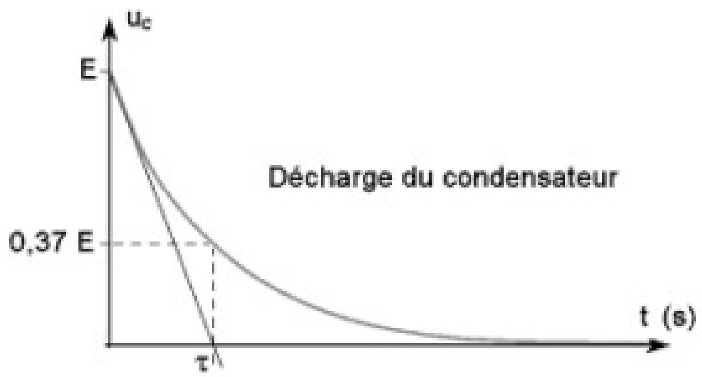
- ***Méthode de la tangente*** :

La tangente à la courbe $u_C(t)$ en $t = 0$ coupe l'asymptote $u(t) = 0$ à $t = \tau$.

- ***Méthode des 63 %*** :

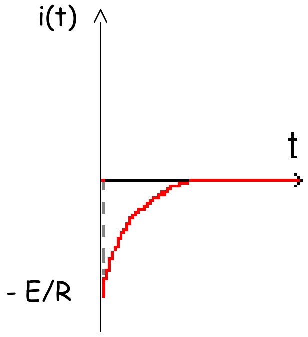
A $t = \tau$, la tension du condensateur a perdu 63 % de sa valeur initiale : $u_C(t = \tau) = 0{,}37\ E$

En effet, $u_C(t = \tau) = E\,e^{-t/\tau} = E\,e^{-1}) = 0{,}37\ E$ soit une diminution de 63 % de sa charge.



Evolution de l'intensité du courant au cours de la charge

$i(t) = C\dfrac{du_C(t)}{dt}$ donc $i(t) = C\,.\,(-\ \dfrac{E}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}\ ) = -\ \dfrac{CE}{RC}e^{\frac{-t}{\tau}}$ soit $\mathbf{i(t) = -\ \dfrac{E}{R}e^{\frac{-t}{\tau}}}$



$i(t) = -\ \dfrac{E}{R}e^{\frac{-t}{\tau}}$

Remarques :

- Au cours de la décharge, en convention récepteur, $i(t) < 0$ car le condensateur restitue l'énergie emmagasinée : il se comporte comme un générateur.
- Une fois le condensateur déchargé, $i(t) = 0$.