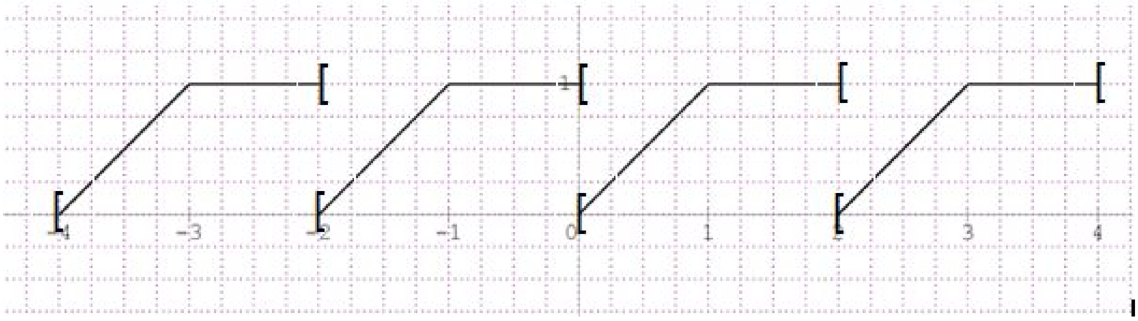
TD Chapitre 8 : Séries de Fourier - CORRECTION

Exercice 1

1. Représentation graphique :



f est 2-périodique et continue par morceaux. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier et on a $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 t\mathrm{d}t + \int_1^2 1\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}[t]_1^2 = \frac{3}{4}$

Soit $n \geq 1$: $a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t$

On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = \cos(n\pi t)$, on a donc $u'(t) = 1$ et $v(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}$ et comme u et v sont de classe C^1 sur $[0;1]$, on peut utiliser la formule d'IPP :

$\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\mathrm{d}t = 0 + \left[\frac{\cos(n\pi t)}{n^2\pi^2}\right]_0^1 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$

$\int_1^2 \cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_1^2 = 0$ donc $a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$

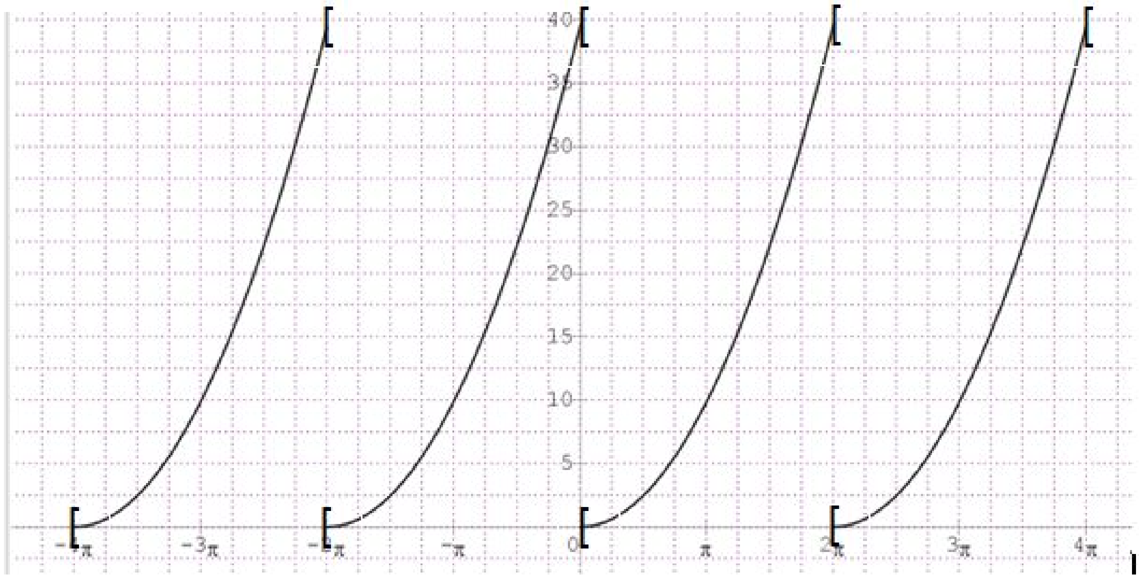
Soit $n \geq 1$: $b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t$

On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = \sin(n\pi t)$, on a donc $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}$ et comme u et v sont de classe C^1 sur $[0;1]$, on peut utiliser la formule d'IPP :

$\int_0^1 t\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \left[\frac{\sin(n\pi t)}{n^2\pi^2}\right]_0^1 = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$

$\int_1^2 \sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_1^2 = \frac{-1 + (-1)^n}{n\pi}$ donc $b_n = \frac{-1 + (-1)^{n+1} + (-1)^n}{n\pi} = \frac{-1}{n\pi}$

2. Représentation graphique :



f est 2π-périodique et continue par morceaux. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier et on a $\omega = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$.

$a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{4\pi^2}{3}$

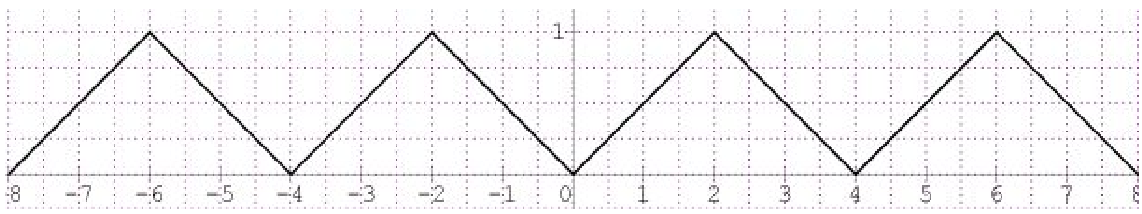
Soit $n \geq 1$: $a_n = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2\cos(nt)\,\mathrm{d}t$.

Deux intégrations par parties successives (par exemple) prouvent que $a_n = \dfrac{4}{n^2}$.

Soit $n \geq 1$: $b_n = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2\sin(nt)\,\mathrm{d}t$.

Deux intégrations par parties successives (par exemple) prouvent que $b_n = -\dfrac{4\pi}{n}$.

3. Représentation graphique :



f est 4-périodique et continue par morceaux. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier et on a $\omega = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

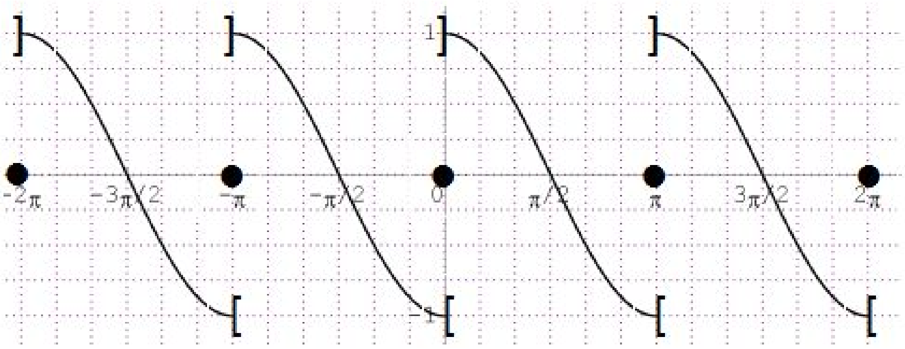
$a_0 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{4} f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{4}\int_0^{2} \dfrac{t}{2}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{t^2}{4}\right]_0^{2} = \dfrac{1}{2}$

Soit $n \geq 1$. Comme f est paire, on a $a_n = \dfrac{4}{4}\displaystyle\int_0^{2} f(t)\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{2} \dfrac{t}{2}\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}t\right)\mathrm{d}t$.

Une intégration par parties prouve que $a_n = \dfrac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]$.

Soit $n \geq 1$. Comme f est impaire, on a $b_n = 0$.

4. Représentation graphique :



f est π-périodique et continue par morceaux. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier et on a $\omega = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$.

Comme f est impaire, on a $a_n = 0$ pour tout entier naturel n.

Comme f est impaire, pour $n \geq 1$, on a
$b_n = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)\sin(2nt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\cos(t)\sin(2nt)\,\mathrm{d}t$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ et
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ donc $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$.

On a donc : $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\sin\left[(2n+1)t\right] + \sin\left[(2n-1)t\right]\right)\mathrm{d}t$

$b_n = -\dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{\cos[(2n+1)t]}{2n+1} + \dfrac{\cos[(2n-1)t]}{2n-1}\right]_0^{\pi/2} =$
$-\dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{\cos(n\pi+\pi/2)-1}{2n+1} + \dfrac{\cos(n\pi-\pi/2)-1}{2n-1}\right]$

$b_n = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n-1}\right) = \dfrac{8n}{\pi\left(4n^2-1\right)}$.

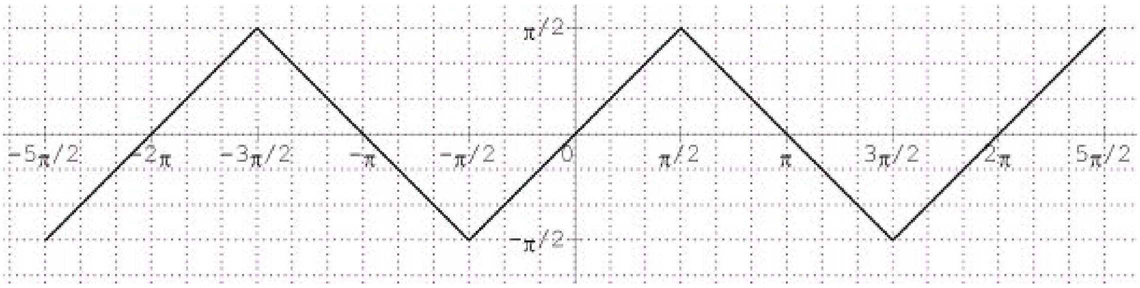
5. La fonction arcsin est une bijection de $[-1;1]$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc pour exprimer f plus simplement, on est amenés à découper l'intervalle $[0;2\pi[$ en
$\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right[$.

— Pour $t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\arcsin(\sin t) = t$.

— Pour $t \in \left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$, on a $t-\pi \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc $\arcsin\left((\sin(t-\pi)\right) = t-\pi$.
En outre, $\sin(t-\pi) = -\sin t$ et comme la fonction arcsin est impaire, on a donc $\arcsin\left(\sin(t-\pi)\right) = -\arcsin\left(\sin t\right) = -f(t)$.
Finalement, on a $f(t) = \pi - t$.

— Pour $t \in \left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$, on a $t-2\pi \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc $\arcsin\left((\sin(t-2\pi)\right) = t-2\pi$.
En outre, $\sin(t-2\pi) = \sin t$ et donc $\arcsin\left(\sin(t-2\pi)\right) = \arcsin\left(\sin t\right) = f(t)$.
Finalement, on a $f(t) = t - 2\pi$.

On en déduit la représentation graphique de f :



f est 2π-périodique et continue par morceaux. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier et on a $\omega = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$.

Comme f est impaire, on a $a_n = 0$ pour tout entier naturel n.

Comme f est impaire, pour $n \geq 1$, on a
$b_n = \dfrac{4}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \sin(nt)\, \mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \sin(nt)\, \mathrm{d}t$.

On montre facilement que $b_n = \dfrac{4\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n^2} - \dfrac{2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}$.

Ainsi, si n est pair $(n = 2p)$, on a $b_{2p} = \dfrac{2\cos(p\pi)}{n} = \dfrac{2 \times (-1)^n}{n}$.

Si n est impair $(n = 2p+1)$, on a $b_{2p+1} = \dfrac{4\sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{\pi n^2} = \dfrac{4 \times (-1)^n}{\pi n^2}$.

Exercice 2

1. f est continue et périodique, donc sa série de Fourier S_h converge vers f en tout réel t.
   $\forall t \in \mathbb{R}$, on a donc $h(-t) = S_h(-t) = S_h(t) = f(t)$ donc f est paire.
2. On écarte immédiatement les courbes 1 et 4 qui ne sont pas les représentations graphiques de fonctions paires.
   On écarte la courbe 3 qui est la représentation graphique d'une fonction périodique de période 1.
   C'est donc la courbe 2 qui est la représentation graphique de la fonction h sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$.
3. Le développement en série de Fourier de h montre que la valeur moyenne de h sur un intervalle de longueur 2 est $\dfrac{\pi}{2}$.
   Soit m l'image de 1 par la fonction h. En utilisant la courbe 2, on voit que la valeur moyenne de h sur $[0, 2]$ est $\dfrac{m}{2}$ donc $h(1) = \pi$.
   Il est alors immédiat que $f(t) = \pi t$ pour t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
4. h est périodique de période 2, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc on peut calculer ses coefficients de Fourier avec $\omega = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

   h est paire donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$,on a $b_n = 0$

   $a_0 = \dfrac{2}{2} \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \pi t \mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2}$

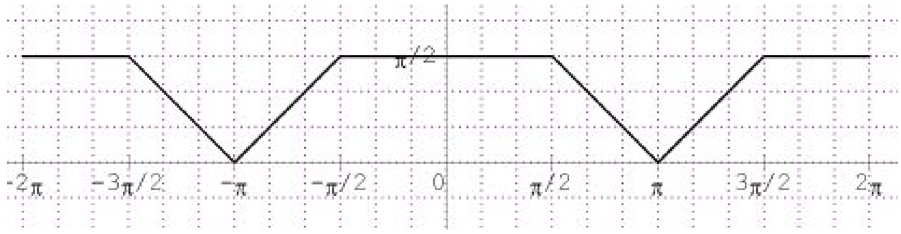
   Soit $n > 0$: comme h est paire on a $a_n = \dfrac{4}{2} \displaystyle\int_0^1 f(t)\cos(n\pi t)\mathrm{d}t = 2 \int_0^1 \pi t \cos(n\pi t)\mathrm{d}t$

   On montre facilement que $a_n = \dfrac{2\left[(-1)^n - 1\right]}{\pi n^2}$.

Pour n pair, on a $(-1)^n = 1$ et $a_n = 0$ et pour n impair égal à $2p+1$, on a $(-1)^n = -1$ et $a_{2p+1} = \dfrac{-4}{\pi(2p+1)^2}$.

On retrouve bien les coefficients de Fourier fournis dans l'énoncé.

Exercice 3

1. **a.** 

b. La fonction f est $2-\pi$ périodique, continue et de classe C^1 par morceaux donc elle satisfait aux deux théorèmes de convergence (Parseval et Dirichlet).

c. On a $\omega = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$ et comme f est paire, $b_n = 0$ pour tout entier non nul n.

En outre, on a $a_0 = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\pi}{2}\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-t)\,\mathrm{d}t$.

On a donc $a_0 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{3\pi}{8}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$:
$a_n = \dfrac{4}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\pi}{2}\cos(nt)\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-t)\cos(nt)\mathrm{d}t$.

Par exemple en intégrant par parties, on a $a_n = 2\dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)}{\pi n^2}$.

On a donc $S_f(t) = \dfrac{3\pi}{8} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)}{\pi n^2}\cos(nt)\right)$.

d. Comme f est paire, $f_e^2 = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(f(t)\right)^2\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\pi^2}{4}\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-t)^2\,\mathrm{d}t$.

$f_e^2 = \dfrac{\pi^2}{8} + \dfrac{\pi^2}{24} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

2. g est une somme de fonctions trigonométriques donc elle est égale à la somme de sa série de Fourier en tout réel t.
Elle vérifie de toute évidence les hypothèses du théorème de Parseval donc on a :

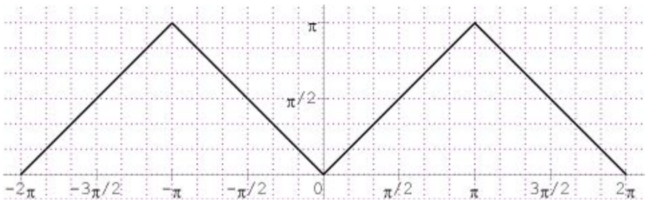
$$g_e^2 = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}^2 + \frac{1}{\pi}^2\right) = \frac{9\pi^4 + 160}{64\pi^2}$$

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t).$$

3. $\dfrac{g_e^2}{f_e^2} = \dfrac{27\pi^4 + 480}{32\pi^4} = 9,998$ arrondi à 10^{-3}.
On trouve un rapport proche de 1, ce qui n'est pas surprenant puisqu'on remarque que g est en fait la somme partielle d'ordre 2 de la série de Fourier de f !

Exercice 4



1. f est $2-\pi$ périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. On a $\omega = 1$ et, comme f est paire, $b_n = 0$ pour tout entier n strictement positif et :
$a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\mathrm{d}x = \dfrac{2\left((-1)^n-1\right)}{\pi n^2}$.
On a $a_n = 0$ pour n pair et, pour n impair égal à $2p+1$, $a_{2p+1} = \dfrac{-4}{\pi\left(2p+1\right)^2}$.
Finalement, on a $S_f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{\cos\left[(2p+1)x\right]}{(2p+1)^2}$.
2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = \dfrac{2\pi^3}{3}$.
f est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut donc appliquer le théorème de Parseval :
$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$.
On a donc $\dfrac{\pi^2}{3} = \dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{8}{\pi^2}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p+1)^4}$
Finalement, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p+1)^4} = \dfrac{\pi^2}{8}\left(\dfrac{\pi^2}{3} - \dfrac{\pi^2}{4}\right)$
$\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p+1)^4} = \dfrac{\pi^4}{96}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^4} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{(2p+2)^4} + \dfrac{1}{(2p+1)^4}\right)$
Les séries de terme général respectifs $\dfrac{1}{(2p+2)^4}$ et $\dfrac{1}{(2p+1)^4}$ sont convergentes (critère d'équivalence à une série de Riemann convergente) donc on a :
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^4} = \dfrac{1}{16}\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{1}{p^4} + \sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p+1)^4}$
On en déduit que $\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^4} = \sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p+1)^4}$
Finalement, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^4} = \dfrac{16}{15}\times\dfrac{\pi^4}{96} = \dfrac{\pi^4}{90}$.
4. f est $2\pi-$ périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier en x converge vers $f(x)$ pour tout réel x :

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos\left[(2p+1)x\right]}{(2p+1)^2}.$$

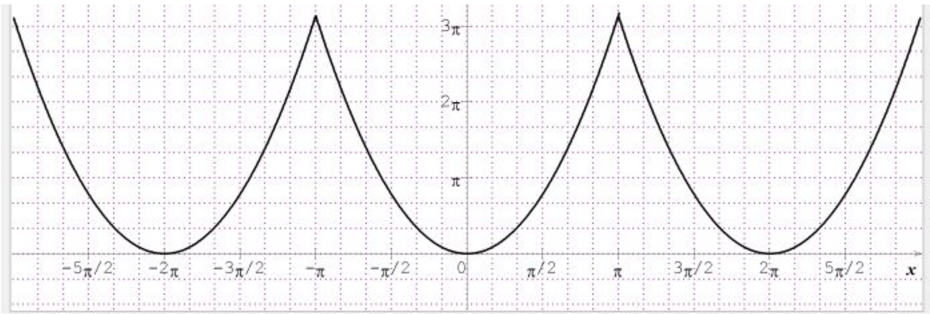
Pour $x = 0$, on a $0 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2}$ soit $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2p+2)^2} + \frac{1}{(2p+1)^2}\right)$.

Les séries de terme général respectifs $\dfrac{1}{(2p+2)^2}$ et $\dfrac{1}{(2p)^2}$ sont convergentes donc :

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$. Finalement, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 5



1. f est $2-\pi$ périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. On a $\omega = 1$ et, comme f est paire, $b_n = 0$ pour tout entier n strictement positif et :
   $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\mathrm{d}x = \dfrac{\pi^2}{3}$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\mathrm{d}x = \dfrac{4(-1)^n}{n^2}$.
   $S_f(x) = \dfrac{\pi^3}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2}$.

2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^4\mathrm{d}x = \frac{2\pi^5}{5}$.
   f est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut donc appliquer le théorème de Parseval :
   $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^4\mathrm{d}x = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$.
   On a donc $\dfrac{\pi^4}{5} = \dfrac{\pi^4}{9} + 8\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^4}$
   Finalement, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9}\right)$
   $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

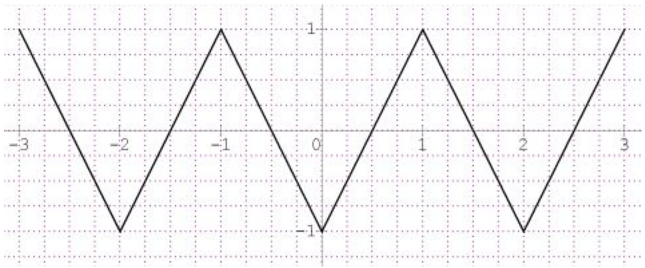
3. f est $2\pi-$ périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier en x converge vers $f(x)$ pour tout réel x :
   $\forall x \in [-\pi;\pi]$, on a $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$.

Pour $x=\pi$, on a $\pi^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ soit $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2 et telle que $f(t) = 2t-1$ si t appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

1. Représentation graphique :



2. f est 2−périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et paire. On a $\omega = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n = 0$.

$a_0 = \dfrac{2}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (2t-1)\,dt = 0.$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n = \dfrac{4}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\cos(\pi n t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 (2t-1)\cos(\pi n t)\,dt = \dfrac{4\left((-1)^n-1\right)}{\pi^2 n^2}$.

On remarque que pour n pair, $a_n = 0$ et pour n impair égal à $2p+1, a_{2p+1} = -\dfrac{8}{\pi^2\left(2p+1\right)^2}$.

3. f est 2−périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$: elle satisfait à toutes les hypothèses du théorème de Dirichlet :

$f(t) = -\dfrac{8}{\pi^2}\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2}\cos\big((2p+1)\pi t\big)$ pour tout réel t.

4. On a $u_p \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4p^2}$ et $\dfrac{1}{p^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente donc la série de terme général u_p converge.

Pour $t=0$, on a $f(0) = -\dfrac{8}{\pi^2}\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2}$ soit :

$\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}.$

Exercice 7*

1. f est $2\pi-$ périodique et continue par morceaux : on peut calculer ses coefficients de Fourier avec $\omega = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$.

   $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{at}\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{e}^{a\pi}-\mathrm{e}^{-a\pi}}{2}$.

   Donc $a_0 = \dfrac{\mathrm{sh}(a\pi)}{a\pi}$.

   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

   $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{at}\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{a(-1)^n\left(\mathrm{e}^{a\pi}-\mathrm{e}^{-a\pi}\right)}{\pi\left(a^2+n^2\right)}$.

   Donc on a $a_n = \dfrac{2a(-1)^n\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi\left(a^2+n^2\right)}$.

   On montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n = 0$.

   En faisant un changement de variable $u = -t$ dans les intégrales qui permettent le calcul des coefficients de Fourier de f_{-a}, on montre facilement que les coefficients de Fourier de f_{-a} sont les mêmes que ceux de f_a.

2. Les fonctions f_a et f_{-a} sont $2\pi-$ périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$. Donc, en utilisant le théorème de Dirichlet et le fait que ces fonctions soient continues sur $[-\pi;\pi]$:

   $\forall t \in [-\pi;\pi], f_{-a}(t) = f_a(t) = \dfrac{2a\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi\left(a^2+n^2\right)}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cos(nt)$.

   $$f_a(t) + f_{-a}(t) = \frac{2\mathrm{sh}(a\pi)}{a\pi} + \frac{4a\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\cos(nt).$$

3. Les fonctions f_a et f_{-a} sont $2\pi-$ périodiques et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Comme ces fonctions sont continues en 0, on a, d'après le théorème de Dirichlet :

   $$f_a(0) + f_{-a}(0) = \frac{2\mathrm{sh}(a\pi)}{a\pi} + \frac{4a\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}$$

   $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2a\mathrm{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}$$

   $\lim\limits_{t\to\pi^-} f_a(t) = \mathrm{e}^{a\pi}$, $\lim\limits_{t\to\pi^+} f_a(t) = \mathrm{e}^{-a\pi}$, $\lim\limits_{t\to\pi^-} f_{-a}(t) = \mathrm{e}^{-a\pi}$ et $\lim\limits_{t\to\pi^-} f_{-a}(t) = \mathrm{e}^{a\pi}$
   donc,d'après le théorème de Dirichlet :

   $$2\mathrm{ch}(a\pi) = \frac{2\mathrm{sh}(a\pi)}{a\pi} + \frac{4a\mathrm{sh}(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\cos(n\pi)$$

   $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2\mathrm{th}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2}$$

Exercice 8*

1. ϕ est $2-\pi$-périodique et continue par morceaux. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier et on a $\omega = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$.

   Comme ϕ est paire, on a $b_n = 0$ pour tout entier naturel n.

$a_0 = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(rt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\sin(rt)}{r}\right]_0^{\pi} = \dfrac{\sin(r\pi)}{r\pi}$.

Comme ϕ est paire, pour $n \geq 1$, on a

$n_n = \dfrac{4}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(rt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$ donc $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$.

On a donc : $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\cos\left[(n+r)t\right] + \cos\left[(n-r)t\right]\right)\mathrm{d}t$

$a_n = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\sin[(n+r)t]}{n+r} + \dfrac{\sin[(n-r)t]}{n-r}\right]_0^{\pi} = \dfrac{\sin[(n+r)\pi]}{n+r} + \dfrac{\sin[(n-r)\pi]}{n-r}$

On montre facilement que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \sin(n\pi + \alpha) = (-1)^n \sin(\alpha)$ donc :

$a_n = \dfrac{(-1)^n \sin(r\pi)}{\pi}\left(\dfrac{-1}{n-r} + \dfrac{1}{n+r}\right) = \dfrac{(-1)^n\sin(r\pi)}{\pi}\left(\dfrac{-2r}{n^2-r^2}\right)$

La série de Fourier de ϕ est :

$$\frac{\sin(r\pi)}{r\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n\sin(r\pi)}{\pi}\left(\frac{-2r}{n^2-r^2}\right)\right)\cos(nt)$$

2. ϕ est en outre continue en 0 donc sa série de Fourier en 0 converge vers $\phi(0) = 1$.

On a donc $1 = \dfrac{\sin(r\pi)}{r\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{(-1)^n\sin(r\pi)}{\pi}\left(\dfrac{-2r}{n^2-r^2}\right)\right)$

Soit, en divisant les deux membres de cette égalité par $\dfrac{\pi}{\sin(\pi r)}$, l'égalité attendue :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi r)} = \frac{1}{r} - 2r\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-r^2}$$

Exercice 9*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{1+\cos^2 t}$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$: $\cos(t+\pi) = -\cos(t)$ et donc $f(t+\pi) = f(t)$: f est bien π-périodique.

2. f est π-périodique et de classe C^1 par morceaux, on peut calculer ses coefficients de Fourier, et on a $\omega = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$.

Soit $n \geq 2$: comme f est paire, on a

$a_{n+1}(f) + 6a_n(f) + a_{n-1}(f) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\dfrac{\cos\left[(2n+2)t\right] + 6\cos(2nt) + \cos\left[(2n-2)t\right]}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$

Or, $\cos\left[(2n+2)t\right] + 6\cos(2nt) + \cos\left[(2n-2)t\right] =$

$\cos(2nt)\cos(2t) - \sin(2nt)\sin(2t) + 6\cos(2nt) + \cos(2nt)\cos(2t) + \sin(2nt)\sin(2t)$

$= 2\cos(2nt)\left(\cos(2t)+3\right) = 2\cos(2nt)\left(2\cos^2 t + 2\right) = 4\cos(2nt)\left(1+\cos^2 t\right)$.

Ainsi, $a_{n+1}(f) + 6a_n(f) + a_{n-1}(f) = \dfrac{16}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(2nt)\mathrm{d}t = \dfrac{16}{\pi}\left[\dfrac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{\pi/2} = 0$.

3. On calcule d'abord a_0 :

f est $2\pi-$ périodique et paire, donc

$a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\dfrac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\dfrac{1}{\cos^2 t}\times\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\cos^2 t}}\mathrm{d}t$

On pose $u = \tan t$, on a donc $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$ et $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2}$

On pose $v = \dfrac{u}{\sqrt{2}}$ et alors immédiatement $a_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On écrit l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence trouvée précédemment :

$$x^2 + 6x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -3 - 2\sqrt{2} = \alpha_1 \text{ ou } x = -3 + 2\sqrt{2} = \alpha_2$$

Ainsi, il existe A et B réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = A\alpha_1^n + B\alpha_2^n$.

La fonction f est 2π-périodique, continue et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le théorème de Dirichlet, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A\alpha_1^2 + B\alpha_2^n\right)\cos(2nt)$$

Pour $t = 0$, on a $f(0) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(A\alpha_1^2 + B\alpha_2^n\right)$.

Or $|\alpha_1| > 1$ et $|\alpha_2| < 1$ donc la série de terme général α_1^n diverge et celle de terme général α_2^n converge.

Si $A \neq 0$ alors la série égale à $f(0)$ diverge : on en déduit que $A = 0$ et $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + B\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_2^n$.

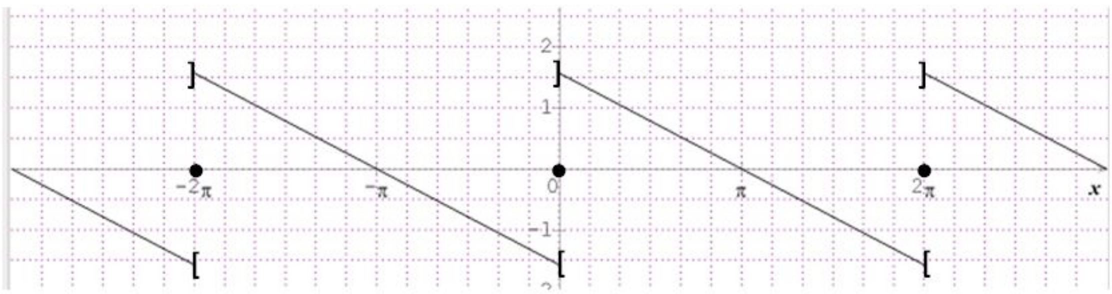
On a donc $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2} = B\dfrac{1}{1-\alpha_1}$ soit $B = 6 - 4\sqrt{2}$. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}, f(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \left(4 - 3\sqrt{2}\right)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-3 + 2\sqrt{2}\right)^{n-1}\cos(2nt)$.

Exercice 10*

Soit f une fonction $2\pi-$périodique, impaire vérifiant :

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \text{ pour} x \in]0\,;\,\pi[.$$

Représentation graphique :



1. f est $2\pi-$périodique, impaire et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On a $\omega = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$

   On montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \dfrac{1}{n}$.

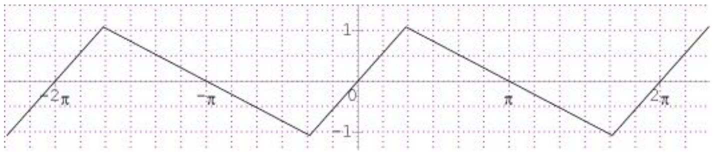
La série de Fourier de f en x est donc $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.
En outre, f est de classe C^1 par morceaux et on peut appliquer le théorème de Dirichlet.
f est continue en tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{2k\pi\} (k \in \mathbb{Z})$, donc $S(x) = f(x)$.
Pour tout $x_0 \in \{2k\pi\}(k \in \mathbb{Z})$, on a $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ et donc $S(x_0) = 0 = f(x_0)$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

2. Soit g $2\pi-$périodique, impaire, continue et définie par :

$$g \text{ est affine sur } [0\,;\,1] \text{ et } \forall x \in [1\,;\,\pi]\,,\; g(x) = S(x).$$

g est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue en 1, on a donc $g(1) = \lim_{x \to 1^+} g(x) = \frac{\pi - 1}{2}$.
En outre, g est impaire donc $g(0) = 0$.
Finalement, on a $\begin{cases} g(x) &= \frac{\pi-1}{2} x \text{ pour } x \in [0;1] \\ g(x) &= f(x) \text{ pour } x \in [1;\pi] \end{cases}$
Représentation graphique :



g est $2\pi-$périodique, impaire et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On a $\omega = 1$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) \mathrm{d}x$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $b_n = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^1 \left(\frac{\pi - 1}{2} \right) x \sin(nx) \mathrm{d}x + \int_1^{\pi} \left(\frac{\pi - x}{2} \right) \sin(nx) \mathrm{d}x \right)$
On montre par suite que $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{\sin(n)}{n^2}$.
La série de Fourier de g en x est donc $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \sin(nx)$.
g est $2\pi-$périodique, impaire, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$: on peut donc appliquer le théorème de Dirichlet :
$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = T(x)$.
En particulier, on a $g(1) = T(1)$. Or, $g(1) = f(1) = S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ et $T(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n} \right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

3. g est continue $2\pi-$ périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut donc appliquer le théorème de Parseval :
$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g^2(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(b_n(f) \right)^2$
On a donc $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{\pi - 1}{2} \right)^2 x^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{\pi} \int_1^{\pi} \left(\frac{\pi - x}{2} \right)^2 \mathrm{d}x$

$\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{\pi-1}{2}\right)^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{(\pi-1)^2}{12\pi}$ et $\frac{1}{\pi}\int_1^\pi\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{(\pi-1)^3}{12\pi}$ Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{(\pi-1)^2}{6}$$

Exercice 11*

1. $a_0\left(f'\right)=\frac{1}{2\pi}\left(f(2\pi)-f(0)\right)=0$ car f est $2\pi-$ périodique.
   On montre facilement à l'aide d'une intégration par parties que pour $n\geq 1$, on a $a_n\left(f'\right)=nb_n(f)$ et $b_n\left(f'\right)=-na_n(f)$.
2. Les fonctions f et f' sont $2\pi-$ périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut donc leur appliquer le théorème de Parseval :
   $\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t=\pi\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\right)^2+\left(b_n(f)\right)^2\right)\leq\pi\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f')\right)^2+\left(b_n(f')\right)^2\right)=\int_0^{2\pi} f'(t)^2\mathrm{d}t$
3. Soit f telle que $\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi} f'(t)^2\mathrm{d}t$.
   On applique le théorème de Parseval à ces deux fonctions, on a donc : $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(n^2-1\right)\left(\left(a_n(f)\right)^2+\left(b_n(f)\right)^2\right)=0$.
   On a donc, pour $n>1$, $a_n(f)=b_n(f)=0$.
   Comme f est $2\pi-$ périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de Dirichlet :
   $\forall t\in\mathbb{R}, f(t)=a_1(f)\cos t+b_1(f)\sin t$.
   Réciproquement, on montre facilement que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\alpha\cos t+\beta\sin t$ vérifie l'égalité $\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi} f'(t)^2\mathrm{d}t$.