# Chapitre 09. Equations horaires du mouvement
# Applications de cours - Corrigé

**<u>Application n° 1 :</u> Equation horaire de la vitesse**

On donne les équations horaires de la position d'un point M dans un repère orthonormé (O, **i**, **j**) :

$x(t) = 5\,t + 10$

$y(t) = -\,0{,}5\,t^2 + t + 2$

La trajectoire de ce point M est représentée sur la figure ci-dessous.

1. Calculer les coordonnées x et y du point M de la trajectoire à chaque seconde (pour t = 0 à t = 10 s).

| point M | $M_0$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ | $M_5$ | $M_6$ | $M_7$ | $M_8$ | $M_9$ | $M_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t en s | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| x (t) | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 |
| y (t) | 2 | 2,5 | 2 | 0,5 | -2 | -5,5 | -10 | -15,5 | -22 | -29,5 | -38 |

2. Exprimer les coordonnées $v_x(t)$ et $v_y(t)$ du vecteur vitesse en fonction du temps t.

$v_x(t) = dx/dt = 5$

$v_y(t) = dy/dt = -0{,}5 \times 2\,t + 1 = -\,t + 1$

3. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse à t = 2s (au point $M_2$) et t = 4 s (au point $M_4$).

Au point $M_2$ :

$x\,(t=2) = 20$ $\quad v_x\,(t=2) = 5$

$y\,(t=2) = 2$ $\quad v_y\,(t=2) = -2 + 1 = -1$

Au point $M_4$ :

$x\,(t=4) = 30$ $\quad v_x\,(t=4) = 5$

$y\,(t=4) = -2$ $\quad v_y\,(t=4) = -4 + 1 = -3$

4. Même question aux points $M_6$ et $M_8$ à t = 6 s et t = 8 s.

Au point $M_6$ :

$x\,(t=6) = 40$ $\quad v_x\,(t=6) = 5$

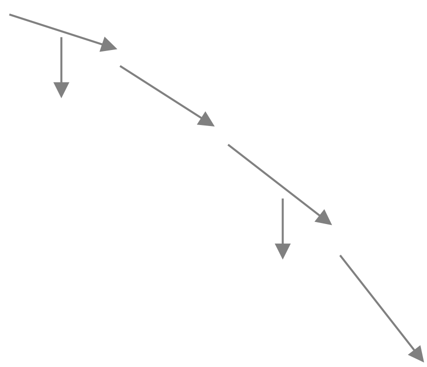
$y\,(t=6) = -10$ $\quad v_y\,(t=6) = -6 + 1 = -5$

Au point $M_8$ :

$x\,(t=8) = 50$ $\quad v_x\,(t=8) = 5$

$y\,(t=8) = -22$ $\quad v_y\,(t=8) = -8 + 1 = -7$

5. A partir de ces coordonnées, représenter sur la trajectoire le vecteur vitesse à t = 2s et t = 4s, puis à t = 5s et t = 6s. Les vecteurs vitesse sont-ils tangents à la trajectoire ?



Les vecteurs vitesse $\vec{v}_2$ , $\vec{v}_3$ , $\vec{v}_5$ et $\vec{v}_6$ sont bien tangents à la trajectoire aux points $M_2$, $M_3$, $M_5$ et $M_6$ .

**<u>Application n°2 :</u> Equation horaire de l'accélération**

On considère les données de l'application n°1.

1. Déterminer les coordonnées $a_x(t)$ et $a_y(t)$ du vecteur accélération.

$a_x = dv_x/dt = 0$

$a_y = dv_y/dt = -1$

2. En déduire les coordonnées du vecteur accélération à t = 3 s (au point $M_3$) et t = 7 s (au point $M_7$).

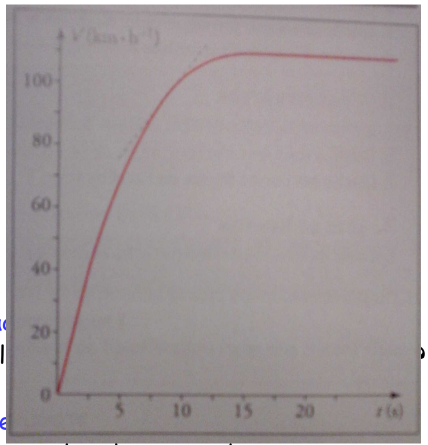
$a_x$ (t=3) = 0 $\qquad$ $a_x$ (t=7) = 0

$a_y$ (t=3) = -1 $\qquad$ $a_y$ (t=7) = -1

3. Représenter sur la trajectoire le vecteur accélération aux points $M_3$ et $M_7$. Vérifier le résultat d'après le tracé des vecteurs vitesses.

Les vecteurs accélération sont bien orientés selon le vecteur variation de vitesse $\vec{v}_4 - \vec{v}_2$ et $\vec{v}_6 - \vec{v}_5$.

**Application n°3 : Accélération : exploitation d'une courbe de vitesse**




Le graphique ci-contre représente l'évolution de la vitesse du centre d'inertie d'une voiture au cours d'un essai sur une route rectiligne.

1. Décrire simplement comment la vitesse évolue au cours de ce mouvement.

La vitesse augmente constamment et tend vers une valeur constante.

2. Définir l'accélération instantanée du centre d'inertie de la voiture.

Pour un mouvement rectiligne, a = dv/dt

3. Comment peut-on calculer l'accélération à partir de la courbe ?

L'accélération peut être mesurée en prenant la pente de la tangente à la courbe v(t) à chaq

4. Dans quel intervalle de temps l'accélération du centre d'inertie de l'automobil ?
Quelle est alors la nature du mouvement ?

L'accélération est constante et non nulle pour 0 < t < 5 s. Le mouvement est alors rectiligne

5. Existe-t-il un intervalle de temps au cours duquel l'accélération est nulle ? Quelle est alors la nature du mouvement ?

L'accélération est nulle pour t > 15 s. Le mouvement est alors rectiligne uniforme.

6. Trouver la valeur de l'accélération aux dates $t_1$ = 1 s et $t_2$ = 8 s.

$a(t_1) = 40 / 2,5 = 16\ m.s^{-2}$

$a(t_2) = (90-40) / 8 = 6,3\ m.s^{-2}$

**Application n°4 : Chute libre sans vitesse initiale**

En un lieu situé près du pôle Nord, un solide, lâché sans vitesse initiale, acquiert une vitesse v = 1,966 $m.s^{-1}$ après 200,0 ms de chute.

1. Exprimer les équations horaires de la vitesse du solide.

$a_z = -g$ car l'objet est en chute libre

a = dv/dt $\qquad$ donc $v_z = -gt + C1$

Or, à t = 0 $\qquad$ $v_z = C_1 = 0$ car l'objet est lâché sans vitesse initiale donc $C_1 = 0$ $\qquad$ d'où $v_z(t) = -gt$

2. En déduire l'intensité de la pesanteur en ce lieu.

$v_z(t=200.10^{-3}) = -1,966\ m.s^{-1}$ $\qquad$ donc $g = -v_z / t$ $\qquad$ $g = 9.830\ N.kg^{-1}$

3. Exprimer les équations horaires de la position du solide.

$v_z = dz/dt$ $\qquad$ donc $z = -\frac{1}{2} gt^2 + C_2$

Or, à t = 0 $\qquad$ $z = C_2 = 0$ $\qquad$ en prenant la position initiale comme origine de l'axe $\vec{z}$ donc $C_2$=0

d'où $\quad z = -\frac{1}{2} gt^2$

4. Calculer la hauteur de chute au bout de 200,0 ms.

$z(t=200.10^{-3}) = -0,1966$ m soit 19,66 cm.

**Application n°5 : Vitesse limite**

Une bille en porcelaine de masse volumique $\rho_b = 2,3\ g.cm^{-3}$ et de rayon r = 0,60cm a un volume de 8,14 $cm^3$ et une masse de 19 g.
Elle tombe dans de la glycérine de densité $d_g$ =1,26.
La force de frottement hydrodynamique est de la forme $f = 6\ \pi\ \eta\ r\ v$ avec $\eta$ viscosité de la glycérine égale à 1,5 Pa.s.
Calculer la vitesse limite atteinte par la bille à l'aide d'un bilan des forces extérieures exercées sur la bille.

Lorsque la bille atteint sa vitesse limite, elle est en mouvement rectiligne uniforme (vitesse constante) donc :

$\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ soit $\vec{P} + \vec{P}_A + \vec{f} = \vec{0}$ $\qquad$ avec P = mg $\qquad$ et $\qquad$ $P_A = \rho_g\ V\ g$

En projection sur l'axe $\vec{z}$ : $-mg + \rho_g\ V\ g + 6\ \pi\ \eta\ r\ v = 0$

D'où $\quad v = \dfrac{(m - \rho_g V) g}{6 \pi \eta r}$ $\qquad$ $v = 0,6\ cm.s^{-1}$

**Application n°7 : Mouvement d'un projectile**

La « grosse Bertha », utilisée par les artilleurs allemands en 1918 pour bombarder Paris, avait une portée maximale de 120 km.
On souhaite déterminer la vitesse théorique de lancement de l'obus, $v_0$.
On appellera $\alpha$ l'angle de lancement, formé par le vecteur vitesse $v_0$ par rapport à l'horizontale.

1. Etablir les équations horaires du mouvement d'un obus.

- Accélération :

$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ Or l'obus n'est soumis qu'à son poids (on néglige les frottements de l'air et la poussée d'Archimède)

donc $m\vec{g} = m\vec{a}$ d'où $\vec{a} = \vec{g}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$ dans un repère où l'axe y est orienté vers le haut.

- Vitesse :

En prenant une primitive de $a_x$ et $a_y$, sans oublier les constantes :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ -gt + C_2 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $C_1$ et $C_2$, utilisons les données expérimentales à savoir les coordonnées de la vitesse à t = 0.

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0) = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$ et par identification avec l'expression de $\vec{v}$ à t = 0 : $$\vec{v}(t=0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 + C_2 \end{pmatrix}$$

on trouve : $C_1 = v_0 \cos \alpha$
$C_2 = v_0 \sin \alpha$

D'où les coordonnées de la vitesse : $$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ -gt + v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

- Position (x,y) :

En prenant une primitive de $v_x$ et $v_y$, sans oublier les constantes :

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha\, t + C_3 \\ \frac{-1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha\, t + C_4 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $C_3$ et $C_4$, utilisons les données expérimentales à savoir la position à t = 0.

$$\vec{OM}(t=0) = \begin{pmatrix} x(t=0) \\ y(t=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ et par identification avec l'expression de $\vec{OM}$ à t = 0 : $$\vec{OM}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 + C_3 \\ 0 + 0 + C_4 \end{pmatrix}$$

on trouve : $C_3 = 0$
$C_4 = 0$

D'où les coordonnées de l'obus : $$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha\, t \\ \frac{-1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{pmatrix}$$

que l'on peut écrire aussi : (1) $x(t) = v_0 \cos \alpha\, t$
(2) $y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha\, t$

2. En déduire l'équation de sa trajectoire.

L'équation de la trajectoire correspond à la fonction y = f(x) : il faut donc exprimer y en fonction de x et non en fonction du te mps t. Pour cela, on remplace t par son expression en fonction de x.

(1) donne : $$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

(2) donne : $$y = \frac{-1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$ donc $$y = -g \frac{x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} + x \tan\alpha$$

3. Sachant que la portée est maximale pour un angle de tir de 45°, déterminer la vitesse théorique de l'obus à la sortie du fût.

La portée du tir correspond à la distance au bout de laquelle l'obus retombe au sol, c'est-à-dire la valeur de $x$ pour laquelle $y = 0$ soit $-g\frac{x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}+x\tan\alpha=0$.

En factorisant par $x$, $x(-g\frac{x}{2v_0^2\cos^2\alpha}+\tan\alpha)=0$ on obtient 2 solutions possibles :

$x = 0$

ou $x=2\frac{v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g}=2\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}=\frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$

Soit $p$ la portée maximale obtenue pour $\alpha=45°$, alors $p=\frac{v_0^2}{g}$ et donc $v_0=\sqrt{pg}$

On obtient $v_0 = 1100\ m.s^{-1}$ soit $3944\ km.h^{-1}$.