TD Chapitre 8 : Séries de Fourier

Exercice 1
On considère les fonctions T-périodiques définies ci-dessous. Représenter les et calculer leurs coefficients de Fourier.

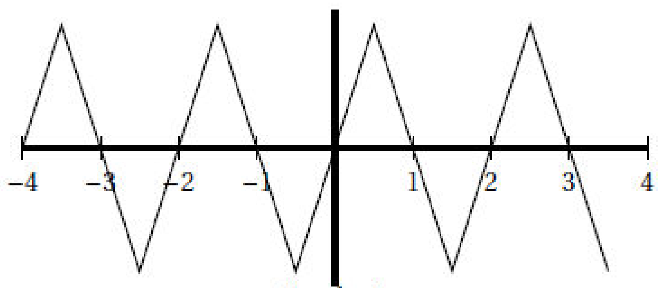
1. $T = 2$ et $\begin{cases} f(t) = t \text{ si } t \in [0\ ;\ 1] \\ f(t) = 1 \text{ si } t \in]1\ ;\ 2[\end{cases}$
2. $T = 2\pi$ et $f(t) = t^2$ si $t \in [0\ ;\ 2\pi[$
3. f est paire, $T = 4$ et $f(t) = \dfrac{t}{2}$ pour $t \in [0\ ;\ 2]$
4. f est impaire, $T = \pi$, $f(0) = 0$ et $f(t) = \cos(t)$ pour $t \in \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$
5. $T = 2\pi$ et $f(t) = \arcsin(\sin t)$ pour $t \in [0\ ;2\pi[$.

Exercice 2
Soit h la fonction définie et continue sur l'ensemble des nombres réels, périodique de période 2, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, dont le développement en série de Fourier est :

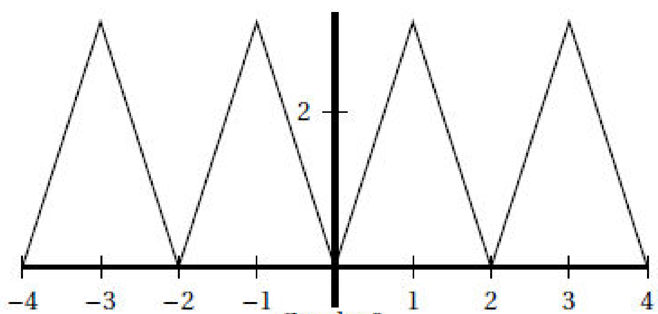
$$S_h = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}\cos[(2p+1)\pi t].$$

1. Déterminer la parité de la fonction h.
2. Ci-dessous sont proposées quatre représentations graphiques.
   Laquelle des quatre courbes proposées est la représentation graphique de la fonction h sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$? Justifier le choix effectué.
3. Déterminer $h(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

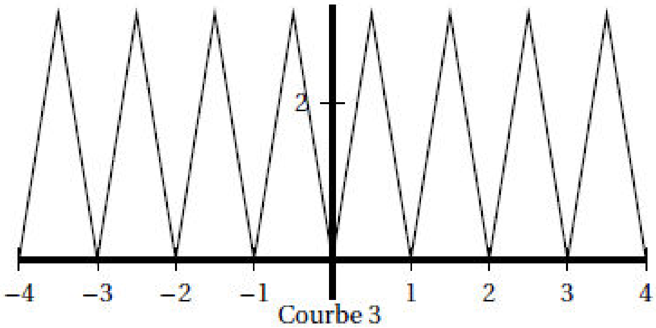
Vérifier le développement en série de Fourier de h en calculant ses coefficients.



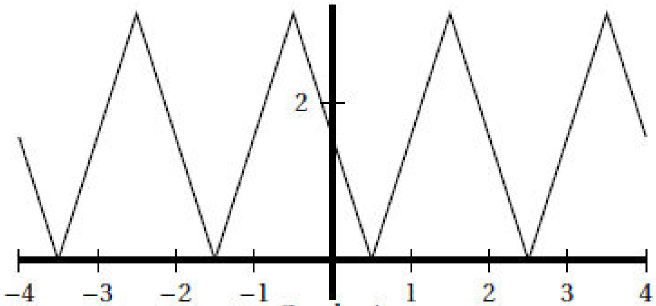
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

Exercice 3

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f \text{ de période } 2\pi \\ f \text{ paire} \\ f(t) = \dfrac{\pi}{2} \text{ si } 0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{2} \\ f(t) = \pi - t \text{ si } \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi \end{cases}$$

   a. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $]-2\pi\ ;\ 2\pi[$.

   b. Justifier que f satisfait les conditions du théorème de convergence.

   c. Déterminer le développement de Fourier de f.

   d. Calculer f_e^2 le carré de la valeur efficace.

2. On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t).$$

   Calculer avec la formule de Parseval g_e^2 le carré de la valeur efficace de g.

3. Calculer à 10^{-3} près, une valeur approchée du rapport $\dfrac{g_e^2}{f_e^2}$.

Exercice 4

Soit f la fonction $2\pi-$ périodique sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ pour $|x| \leq \pi$.

1. Déterminer la série de Fourier de f.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{d}x$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.
3. Déduire de la question précédente la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
4. Montrer que $|x| = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos\left[(2p+1)x\right]}{(2p+1)^2}$.

   En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 5

Soit f la fonction $2\pi-$ périodique sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour $|x| \leq \pi$.

1. Déterminer la série de Fourier de f.
2. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \mathrm{d}x$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
3. Montrer que $\forall x \in [-\pi;\pi]$, on a $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$.

   En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 6

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2 et telle que $f(t) = 2t - 1$ si t appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, construire la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Montrer que $f(t) = -\dfrac{8}{\pi^2} \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos\big((2p+1)\pi t\big)$ pour tout réel t.
4. Soit la série de terme général $u_p = \dfrac{1}{(2p+1)^2}$ pour $p \in \mathbb{N}$.

   a. Montrer que cette série est convergente.

   b. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} u_p$.

Exercice 7*

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a, $2\pi-$périodique, continue par morceaux telle que pour tout réel t de $[-\pi;\pi]$, on ait $f_a(t) = \mathrm{e}^{at}$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f_a, puis de f_{-a}.
2. Justifier que pour tout réel t de $[-\pi;\pi]$:
$$f_a(t) + f_{-a}(t) = \frac{2\mathrm{sh}\,(a\pi)}{a\pi} + \frac{4a\mathrm{sh}\,(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\cos(nt).$$
3. Calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}$ puis de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2+n^2}$.

Exercice 8*

Soit r un réel tel que $0 < r < 1$.

Soit ϕ la fonction $2\pi-$périodique coïncidant sur $[-\pi;\pi]$ avec la fonction $t \longmapsto \cos(rt)$.

1. Déterminer la série de Fourier de ϕ.
2. En déduire que $\displaystyle\frac{\pi}{\sin(\pi r)} = \frac{1}{r} - 2r\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-r^2}$.

Exercice 9*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{1+\cos^2 t}$.

1. Montrer que f est une fonction $\pi-$périodique.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $a_{n+1}(f) + 6a_n(f) + a_{n-1}(f) = 0$.
3. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \left(4-3\sqrt{2}\right)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-3+2\sqrt{2}\right)^{n-1}\cos(2nt)$.

Exercice 10*

Soit f une fonction $2\pi-$périodique, impaire vérifiant :
$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \text{ pour} x \in]0\,;\,\pi[.$$

1. Calculer
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}.$$
2. Soit g $2\pi-$périodique, impaire, continue et définie par :
$$g \text{ est affine sur } [0\,;\,1] \text{ et } \forall x \in [1\,;\,\pi]\,,\ g(x) = S(x).$$
Démontrer
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}.$$
3. Déterminer
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}.$$

Exercice 11*

Soit f une fonction $2\pi-$périodique à valeurs réelles, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $a_0(f) = 0$.

1. Exprimer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)^2\mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} f'(t)^2\mathrm{d}t$.
3. Etudier le cas d'égalité.